Feuille d'exercices numéro 9

2007 -2008

Ex 1: Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$. **b)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$.

c) $\{(x,1) / x \in \mathbb{R}\}$. **d)** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\}$

e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \neq y\}$

Ex 2: Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Les sous-ensembles de E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

a) $\{f \in E / f(1) = 0\}$ **b)** $\{f \in E / f(0) = 1\}$

c) $\{f \in E$ / f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = f\}$

d) $\{f \in E$ / f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'' = -f\}$

e) $\{f \in E$ / f est périodique de période $T\}$

f) $\{f \in E$ / f est périodique$\}$.

Ex 3 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes.

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

$A = \{ (u_n)_{n\in \mathbb{N}} \in E,\ u_0 = 5\}$ $B = \{ (u_n)_{n\in \mathbb{N}} \in E,\ u_0 = u_1 \}$

$C = \{ (u_n)_{n\in \mathbb{N}} \in E,\ u_0 = 0\}$ $D = \{ (u_n)_{n\in \mathbb{N}} \in E,\ \forall n\in \mathbb{N}, |u_n| \leq 10\}$

$F = \{ (u_n)_{n\in \mathbb{N}} \in E$, $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ suite arithmétique $\}$

$G = \{ (u_n)_{n\in \mathbb{N}} \in E$, $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ suite géométrique $\}$

Ex 4: Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x) + f(y) = 2 f(\frac{x+y}{2})$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev .

Ex 5: Soit $F_a = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / ax + a^2y - a^3 + a^2 + 2a = 0 \}$ où $a \in \mathbb{R}$.

a) Trouver les valeurs de a pour lesquelles F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer F_a pour ces valeurs de a.

Ex 6 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

b) En déduire que si $F\neq E$ et $G\neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

Ex 7 : Montrer que $(F\cap G = F\cap H$ et $F+G = F+H$ et $G \subset H) \Rightarrow G = H$

avec F , G et H trois sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E .

Ex 8: Soit E un $\mathbb{R}$-ev . Démontrer que quels que soient les projecteurs p et q de E , on a :

1) p+q est un projecteur $\Leftrightarrow$ poq+qop = 0 (0 application nulle de E)

2) poq+qop = 0 $\Leftrightarrow$ poq = qop = 0 .

3) On suppose la condition précédente (poq=qop=0) réalisée . En déduire que $\text{Imp} \cap \text{Imq} = \{0_E\}$ et que $\text{Ker}(p+q) = \text{Kerp} \cap \text{Kerq}$.

T.S.V.P

Ex 9: **1)** Soit p : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad p((x,y)) = (x,x)$.

a) Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer Ker p et Im p

c) Montrer que p o p = p .

2) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et p un endomorphisme de E .

Démontrer que :

a) p est un projecteur de E ssi (Id_E - p) est un projecteur de E .

b) p est un projecteur de E ssi $(Id_E - 2p)^2 = Id_E$.

3) Soit p un projecteur de E . Démontrer que :

a) Imp est l'ensemble des vecteurs x de E tels que p(x)=x .

b) Ker(Id_E-p) = Imp et Im(Id_E-p) = Kerp .

4) Soit p et q deux projecteurs de E tels que poq = 0 . Démontrer que p'=p+q - qop est un projecteur de E et que l'on a : Kerp' = Kerp $\cap$ Kerq et Imp' = Imp + Imq .

Ex 10: Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes , montrer que F = $\{\ (u_n)_{n\in \mathbb{N}} \in\ E \ /\ \lim_n u_n = 0\ \}$ est un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de E .

En donner un supplémentaire G .

Ex 11: Soient F,G et H des sous-espaces vectoriels de E. On pose

A = F $\cap$ (G+H) ; B = (F$\cap$G) + (F$\cap$H) .

a) Montrer que B $\subset$ A , mais que l'inclusion peut être stricte.

b) Montrer que si F contient G ou H, alors A = B.

c) Montrer que B = F $\cap$ (G + (H$\cap$F)) .

d) Etudier les inclusions entre C = F + (G$\cap$H) et D = (F+G) $\cap$ (F+H) .

Ex 12: Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit δ de E dans $\mathbb{R}$ définie par δ(f) = f(0) .

Montrer que δ est une application linéaire . Déterminer Kerδ et un supplémentaire de Ker δ .

Ex 13: **1)** Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des applications paires est un sous-espace vectoriel de E .

2) Soit p de E dans E tel que p (f) = g avec $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$. Montrer que p est une application linéaire sur E et que pop = p .

Ex 14 : Soit E = $\mathbb{R}^3$. On note F = $\{\ (x,y,z) \in\ E / x + y + z = 0\ \}$ et G = $\{\ (x,y,z) \in\ E / x - y + z = 0\ \}$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

2) On note f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall\ (x,y,z) \in\ E, f((x,y,z)) = x - y + z$.

a) Montrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer Ker f . En déduire que G est un sous-espace vectoriel de E .

3) F $\cap$ G est un sous-espace vectoriel de E . Déterminer ses éléments .

Ex 15 : Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f o f - 5 . f + 6\ Id = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que E = Ker (f -2.Id) $\oplus$ Ker (f -3.Id) .

Ex 16: On note E l'ensemble des applications de [0,1] dans $\mathbb{R}$.

On définit G = $\{ f \in$ E / $\forall\ x \in\ \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $f(x) = 0$ } et H = $\{ f \in$ E / $\forall\ x \in\ [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ }

Montrer que G et H sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .