Feuille d'exercices numéro 6

2007 -2008

Ex 1: Etudier et représenter graphiquement la fonction f : $x \mapsto \ln|\mathrm{sh}x|$

Ex 2: **a)** Etudier et représenter graphiquement la fonction f : $x \mapsto \ln|\ln(x)|$.

b) Montrer que $\forall$ m $\in \mathbb{R}$, l'équation f (x) = m admet deux racines réelles a et b , les calculer .

Ex 3: Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2x+1}{4}\cos(\pi x)$.

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}$.

Ex 4: Construire la courbe Γ d'équations paramètriques $\begin{cases} x = a(t - \sin(t)) \\ y = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$ avec $a>0$.

Ex 5: Etudier et représenter les courbes paramétrées suivantes :

a) $\begin{cases} x(t) = \cos(t) - \dfrac{1}{2}\cos(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{1-t} \\ y(t) = \dfrac{t^2 - 2t}{t-1} \end{cases}$

Ex 6: Pour quelles valeurs de λ la courbe C_λ définie par : $\begin{cases} x = \cos(3t) + (\lambda - 3)\cos(t) \\ y = \sin(3t) + (\lambda + 3)\sin(t) \end{cases}$ admet-elle des points de rebroussement ?

Ex 7: Construire la courbe définie par : $x = \sin(t)$ et $y = \dfrac{\cos^2(t)}{2 - \cos(t)}$

Ex 8: **1)** Déterminer les valeurs de a pour que la courbe d'équation paramétrique **:** $\begin{cases} x = \cos(t) + a\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ y = \sin(t) \end{cases}$

possède un point singulier.

2) Etudier la courbe dans ce cas.

Ex 9: On considère la courbe d'équation polaire : $\rho = 2a\cos(\frac{\theta}{3})$ avec a>0 .

Construire cette courbe en précisant les tangentes au point double .

T.S.V.P

Ex 10: **1)** Construire la courbe d'équation polaire : $\rho = \dfrac{1}{1+\tan(\theta)}$

2) Construire la courbe d'équation polaire : $\rho = 2+\dfrac{1}{\cos(\theta)}$

Ex 11: Construire la courbe d'équation polaire : $\rho = \dfrac{3}{2}+\sin(\theta)\sqrt{|\cos(\theta)|}$.

Ex 12: On considère l'ensemble Γ des points M d'un plan dont les coordonnées (x,y) dans le repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ vérifient la relation : $\dfrac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$.

Démontrer que Γ est la réunion de deux coniques dont on déterminera les éléments caractéristiques .

Ex 13: Soit , dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, les courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$, ensemble des points M dont les coordonnées (x,y) vérifient $\mathcal{H} : 4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0$ et $\mathcal{E} : 16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0$.

Déterminer les équations réduites de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$.
Vérifier que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ ont même centre de symétrie .
Déterminer les axes de symétries et les foyers de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$.

Ex 14: Soit , dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, les courbes $\mathcal{C}_m$ d'équation :

$2mx^2 - 8mx - (m-1)y^2 + 12m - 2 = 0$, où m est un paramètre réel .

1) Déterminer selon les valeurs de m la nature des courbes $\mathcal{C}_m$.

2) Trouver les valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{C}_m$ est :

a) Un cercle .

b) Une hyperbole équilatère .

Ex 15: Le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation : $3x^2 - 6x + 4y^2 - 9 = 0$.

1) Démontrer que $\mathcal{C}$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques .

2) Soit Δ la droite d'équation $x+3 = 0$.

Montrer que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M tels que d (M;O) = $\dfrac{1}{2}$ d (M , Δ) .

Ex 16: Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ définie paramétriquement par $x = t^2 + t + 1$ et $y = t^2 - 2t + 2$ est une parabole dont on précisera le sommet et l'axe .

Ex 17: Préciser la nature et les éléments de la conique suivante : $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 5 = 0$.