Feuille d'exercices numéro 18

2007 -2008

Ex 1: On considère 6 points du plan $A_1;A_1';A_2;A_2';A_3;A_3'$ tous distincts .On suppose les droites A_1A_1' et A_2A_2' non parallèles . Soient $(a_i;b_i)$ (resp $(a'_i;b'_i)$) les coordonnées de A_i (resp A_i') dans un repère . Trouver une CNS sur ces coordonnées pour que les trois droites A_iA_i' soient concourantes .

Ex 2: Dans un plan affine on donne un triangle ABC . A';B' et C' sont les milieux des côtés [B,C] ; [C,A] et [A,B] . A tout point I du plan ; on associe M ; N et P symétriques de I par rapport à A' ; B' et C' .

a) Montrer que AM,BN et CP ont même milieu I' .

b) Quelle est la transformation du plan affine qui transforme ABC en A'B'C' ?

c) Montrer que la transformation du plan par laquelle I a pour image I' est une transformation affine .

Ex 3: A;B;C et D sont 4 points de l'espace affine . Déterminer une CNS sur ces 4 points pour qu'il existe f affine telle que f(A)=B ; f(B)=C ; f(C)=D et f(D)=A .
(On pourra étudier les cas a) A,B,C,D non coplanaires puis b) A,B,C,D coplanaires et A,B,C non alignés et enfin c) A,B,C alignés)

Ex 4: Soit un triangle ABC non aplati . Soit P le barycentre de $(B,1-\alpha)$ et (C,α) , Q celui de $(C,1-\beta)$ et (A,β) ; R celui de $(A,1-\gamma)$ et (B,γ) . A quelle condition P;Q et R sont-il alignés ?

Ex 5: **a)** Soient A_1 , ... , A_n n points distincts et G_i l'isobarycentre de $\{A_1 , ... ,A_n\}-\{A_i\}$.

Calculer $\vec{S} = \overrightarrow{A_1G_1} + \ldots + \overrightarrow{A_nG_n}$

b) Soit O un autre point et $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Déterminer f définie par $f : M \mapsto M'$ tel que

$$\overrightarrow{OM'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iM} .$$

Ex 6: Soient A,B,C non alignés et le repère $R = (A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ dans le plan .
Soit G le barycentre de $\{ (A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ lorsqu'il existe . Déterminer l'ensemble des points G dans les cas suivants :

a) $\alpha=2$ $\beta=1-m$ $\gamma=1+m$ avec $m \in \mathbb{R}$

b) $\alpha=-m$ $\beta=m-1$ $\gamma=m+1$ avec $m \in \mathbb{R}$

Ex 7: Dans un espace affine ***E*** on donne deux points A et B . Soit f l'application de ***E*** dans ***E*** qui a tout point M de ***E*** associe le point M' barycentre de (A,a),(B,b),(M,m) où a,b,m sont trois réels tels que $a+b+m\neq0$.
Montrer que si a+b=0 , f est une translation et si $a+b\neq0$ f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport .

T.S.V.P

Ex 8: Soit ***E*** un espace affine de dimension 3 , $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de ***E***. Montrer que l'application f de ***E*** dans ***E*** qui au point M de coordonnées (x,y,z) associe le point M'(x',y',z') tel que :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + 2z - 2 \\ y' = 4x - 7y + 4z - 4 \\ z' = -x + 2y + 1 \end{cases}$$ est une affinité dont on déterminera la direction et le rapport .

Ex 9: Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'application affine f définie par les équations : $X = \frac{1}{5}(-3x+4y+4)$ $\quad Y = \frac{1}{5}(4x+3y-2)$

a) Montrer que f est une isométrie .
b) Montrer qu'il y a une droite de points invariants .
c) Caractériser géométriquement l'application f .

Ex 10: Le plan affine euclidien est rapporté au repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$ où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs normés tels que $\widehat{(\vec{i},\vec{j})} = \alpha$. Déterminer dans ce repère l'expression analytique de la rotation de centre $\Omega(1,1)$ et d'angle θ . $(\alpha \in]0;\pi[)$

Ex 11: Etudier l'application f qui au point M(x,y,z) fait correspondre le point M'(x',y',z') dans un repère orthonormé avec :

$$\begin{cases} x' = \beta + \frac{1}{3}(x - 2y + 2z) \\ y' = 2(1-\beta) + \frac{1}{3}(-2x + y + 2z) \\ z' = -\beta + \frac{1}{3}(2x + 2y + z) \end{cases}$$ avec β réel .

Ex 12: Dans un espace affine ***E*** rapporté à un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on définit une application f de ***E*** dans ***E*** par la condition suivante : le point M(x,y,z) a pour image M'(x',y',z') avec : $\begin{cases} x' = -z + 2 \\ y' = -x + 1 \\ z' = y - 1 \end{cases}$

Déterminer géométriquement f .

Ex 13: Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans P et Π d'équations respectives x+y-z-1=0 et x+2y-3z+1=0 .
Ecrire l'équation du plan Π' transformé de Π par la réflexion par rapport à P .

Ex 14: Déterminer la nature de l'application f qui au point M(x,y,z) fait correspondre le point M'(x',y',z') dans un repère orthonormé avec :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3 \end{cases}$$

Ex 15: Soit E un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Déterminer la nature de l'application f qui au point M (x,y) associe le point M' (x',y') défini par : $\begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} \\ y' = \sqrt{3}x + y + \sqrt{3} \end{cases}$

Feuille d'exercices numéro 18 bis

2007 -2008

Soit l'espace affine euclidien E rapporté au repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Première Partie

1) Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\begin{cases} f(\vec{i}) = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \\ f(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \\ f(\vec{k}) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \end{cases}$.

Montrer que $\forall \vec{v} \in E, \|f(\vec{v})\| = 3\|\vec{v}\|$.

2) Soit g l'endomorphisme de E qui au vecteur ayant pour coordonnées (x,y,z) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fait correspondre le vecteur ayant pour coordonnées dans cette base : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 2z) \\ z' = -\frac{1}{3}(2x + 2y + z) \end{cases}$.

a) Montrer que f est la composée de g et d'une homothétie de rapport k que l'on précisera .

b) En déduire que g est une isométrie vectorielle .

3) Montrer que g est un demi-tour dont on précisera l'axe .

4) **a)** Soit P le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Montrer que P est globalement invariant par g et par f .

b) Montrer que $\tilde{f}$, restriction de f au plan P est la composée de deux endomorphismes simples de P que l'on précisera .

Deuxième Partie

m étant un nombre réel , on désigne par A_m le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}$ et par G_m le vissage de E dont l'endomorphisme associé est g et qui transforme O en A_m .

1) **a)** Démontrer qu'il existe un unique réel m_0 tel que G_{m_0} soit une rotation .

b) Préciser les éléments caractéristiques de G_{m_0} .

2) **a)** Déterminer la rotation r_m et la translation t_m de vecteur parallèle à l'axe de r_m telles que : $G_m = r_m \circ t_m = t_m \circ r_m$.

b) D_m désigne l'axe de r_m . Démontrer que D_m est contenue dans un plan affine indépendant de m .

3) Soit Q le plan affine ayant pour équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$: $x - y + \frac{1}{2} = 0$.

a) Démontrer que Q est globalement invariant par G_m .

b) Caractériser la restriction de G_m à Q .

Troisième Partie

On désigne par B_m le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2m \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}$ et par F_m l'application affine de E dans E dont l'endomorphisme associé est f et qui transforme O en B_m .

1) Si H désigne l'homothétie de centre O de rapport 3 , montrer qu'il existe une translation T telle que :

$F_m = T \circ H \circ G_m$.

Déterminer T .

2) En déduire que D_m est globalement invariant par F_m .