Feuille d'exercices numéro 16

2007 -2008

Ex 1: Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie par g (0) = f (0) et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x)=\dfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt$.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g .

b) Démontrer que g est paire .

Ex 2: Soient g une fonction à valeurs réelles de classe C^3 sur [0;1] et $(\alpha;\beta)$ un couple d'éléments de [0;1] tel que $\alpha<\beta$. On suppose $g(\alpha) = g(\beta) = 0$. Soit $M = \sup_{t\in[0;1]}|g''(t)|$.

Soit G la fonction définie sur [0;1] par les relations $G(\alpha) = g'(\alpha)$ et $G(t) = \dfrac{g(t)}{t-\alpha}$ si $t \neq \alpha$.

a) Prouver que G est continue , puis qu'elle est de classe C^1 sur [0;1] .

b) Prouver que , pour tout élément t de [0;1] , $|G'(t)| \leq \dfrac{M}{2}$.

c) En conclure que , pour tout élément t de [0;1] , $| g (t) | \leq \dfrac{1}{2} |(t-\alpha)(t-\beta)| M$.

Ex 3: Faire un DL au voisinage de 1 , à l'ordre 1 , de $f(x) = \text{Arcsin}(x^2 + x - \dfrac{3}{2})$

Ex 4: **a)** Quel est le DL à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$?

b) Quel est le DL à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$?

c) Quel est le DL à l'ordre 4 en 1 de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$?

d) Quel est le DL à l'ordre 9 en 0 de $f(x) = \ln^3(\text{ch}(x))$?

e) Quel est le DL à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \dfrac{\text{Arcsin}(x)}{\text{Arccos}(x)}$?

Ex 5: Quel est le DL à l'ordre 7 de f (x)= (cosx -1)(shx-x) - (chx-1)(sinx-x) au voisinage de 0 ?

Ex 6: Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{2(1-\cos(x))\sin(x) - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x - x^5}\right)$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(\text{ch}(x)) + \ln(\cos(x))}{\sqrt{\text{ch}(x)} + \sqrt{\cos(x)} - 2}\right)$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin(x)^4}\left(\sin\left(\dfrac{x}{1-x}\right) - \dfrac{\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$

d) $\lim_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$

Ex 7: Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et f (0) = 0 . Montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ à tout ordre n et déterminer f '(0) , f "(0) , ... $f^{(n)}(0)$. Quel est son développement limité à l'ordre n en 0 ?

Ex 8: Etudier et représenter graphiquement la fonction $f_a(x) = (x+a)$ Arctanx .

Ex 9: Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$, de $\varphi_n(x) = (x(e^{1/n} - 1) + 1)^n - e^x$ avec $x \in [0;1]$.

T.S.V.P

Ex 10: Construire la courbe définie par : $x = 3t^2 - 2t^3$ et $y = 5t^4 - 4t^5$.
On étudiera soigneusement la nature des points singuliers .

Ex 11: Etudier la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$.

On détaillera l'étude locale au voisinage du point de paramètre $t = 1$.
Tracer le graphe dans un repère orthonormé .

Ex 12: Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x + x^2}{\ln(1 + x + x^2)}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f .
2) Déterminer un DL d'ordre 2 en 0 de f .
3) En déduire l'équation de la tangente en 0 à C_f.
4) Etudier les variations de f .
5) Nature des branches infinies .
6) Représenter graphiquement f .

Ex 13 : Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1 - x^2} \ln|x|$

1) Déterminer le DL à l'ordre n de la fonction $g : x \mapsto x \ln x$ au voisinage de 1 .
2) Déterminer le DL à l'ordre 2 en 1 de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) + 1}{x - 1}$.

Ex 14 :

Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^t}{1+t^2}$. Il est clair que f est définie $\mathbb{R}$ entier, et que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous noterons C_f la courbe représentative de f.

1. – Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?

2. – Qu'en déduisez-vous au sujet de C_f ?

3. – Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions «est équivalent à», «est négligeable devant», «est dominé par» :

$f(t)$ .... e^t lorsque t tend vers $+\infty$
$f(t)$ .... $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$
$f(t)$ .... $\dfrac{e^t}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$

Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre choix.

4. – Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

5. – Explicitez $f'(t)$.

6. – Dressez le tableau des variations de f.

7. – Explicitez $f''(t)$.

8. – Montrez que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée α. Vous ne chercherez pas à calculer α.

9. – Prouvez l'encadrement $-\dfrac{1}{5} < \alpha < 0$.

10. – Explicitez le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0. Que pouvez-vous en déduire concernant $\mathcal{C}_f$?

11. – Tracez la courbe représentative de f. Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

Feuille d'exercices numéro 16 Bis

2007 -2008

Problème de revision d'analyse

Partie A : Étude d'une fonction

1. a) On suppose, dans cette question, qu'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$, vérifiant pour tout réel x appartenant à $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, l'égalité :

$$x(1-x)f'(x) + (1-x)f(x) = 1$$

Soit h la fonction définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, par : $h(x) = xf(x)$.
Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et calculer sa dérivée.
En déduire qu'il existe deux constantes réelles c_1 et c_2 vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[, & h(x) = -\ln(1-x) + c_1 \\ \forall x \in]0, 1[, & h(x) = -\ln(1-x) + c_2 \end{cases}$$

b) On définit une fonction f sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[, & f(x) = \dfrac{-\ln(1-x) + c_1}{x} \\ \forall x \in]0, 1[, & f(x) = \dfrac{-\ln(1-x) + c_2}{x} \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.
Déterminer les constantes c_1 et c_2 pour que la fonction f soit prolongeable par continuité en 0.

2. Dans toute la suite de cette partie, f désigne la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ puis le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f .

b) En déduire que la fonction f est continue en 0, dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

c) Montrer que, pour tout x de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} - f(x)\right)\frac{1}{x}$$

En utilisant le développement limité de la question précédente, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

3. a) Étudier le signe de la fonction φ définie sur $]-\infty, 1[$ par : $\varphi(x) = \dfrac{x}{1-x} + \ln(1-x)$ ·
En déduire les variations de la fonction f

b) Donner le tableau de variation de la fonction f et l'allure de la représentation graphique de f en précisant les asymptotes, la tangente à l'origine et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de l'origine.

4. Soit x un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

a) Soit h la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par : $h(t) = -\ln(1-t)$.
Calculer, pour tout réel t de $]-\infty, 1[$, $h'(t)$, $h''(t)$, puis pour tout entier naturel n non nul, $h^{(n)}(t)$.

b) Justifier, pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} \, dt$$

c) Établir, pour tout réel t de l'intervalle $[0, x]$, la double inégalité : $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$ ·
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la double inégalité :

$$0 \leqslant f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1} \leqslant x^{n+1} f(x)$$

d) Justifier l'égalité : $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ ·

Partie B : Étude d'une variable aléatoire à densité

1. Dans cette question f est la fonction définie à la question **2.** de la partie A.

a) Soit f_1 la fonction définie sur $]0,1]$ par : $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{\ln t}{t-1} & \text{si} \quad t \neq 1 \\ f_1(1) = 1 \end{cases}$

Justifier la continuité de f_1 sur $]0,1]$ et établir, pour tout réel x de $]0,1[$, l'égalité :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1-x}^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Soit a un réel de l'ntervalle $]0,1[$. Établir pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$\int_a^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{a^{n+1}\ln a}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}(1-a^{n+1})$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t$ et l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

c) Soit a un réel de l'intervalle $]0,1[$ et n un entier naturel, démontrer pour tout t de $[a,1]$, l'égalité

$$\int_a^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^n \int_a^1 t^k \ln t\,\mathrm{d}t = \int_a^1 t^{n+1} f_1(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Montrer que la fonction $t \mapsto t\,f_1(t)$ est prolongeable en une fonction h_1 continue sur $[0,1]$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t$ converge et qu'elle vérifie :

$$\int_0^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 t^n\,h_1(t)\,\mathrm{d}t$$

e) On désigne alors par M le maximum sur $[0,1]$ de la fonction h_1.

Établir, pour tout entier naturel n, l'inégalité :

$$0 \leqslant \int_0^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{M}{n+1}$$

f) Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, puis l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ex 14 : fin

Notons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Ainsi, F est la primitive de f qui s'annule en 0.

17. – Quel est le sens de variation de F ?

18. – Montrez que $F(x)$ possède une limite ℓ finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne chercherez pas à expliciter cette limite.

19. – Prouvez l'encadrement $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$.

20. – Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de F, au point d'abscisse 0.

21. – Explicitez le développement limité de F à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons $J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2}\,dt$, $K(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\,dt$ et $L(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^4}\,dt$.

22. – Prouvez l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x.

23. – Pour $x \geqslant 1$, placez les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.

24. – Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrez que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\dfrac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

25. – En découpant l'intervalle $[1,x]$ sous la forme $[1,x^{3/4}] \cup [x^{3/4},x]$, montrez que $L(x)$ est négligeable devant $\dfrac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

26. – En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

27. – Exploitez les résultats des questions **17**, **19**, **20** et **26** pour donner l'allure de la courbe représentative de F.