Feuille d'exercices numéro 14

2007 -2008

Ex 1: Soit $a_{k,l} = \exp(\frac{2kl\pi}{n} i)$ et $A = \left((a_{k,l}) \right)_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le l \le n}}$ et $\overline{A} = \left((\overline{a}_{k,l}) \right)_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le l \le n}}$

Calculer $A\overline{A}$.

Ex 2: $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ sont des nombres réels , n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

Soit L la matrice ligne (a,b,c) et C la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Calculer LC,CL,$(LC)^n$ et $(CL)^n$.

Ex 3: Soit X une matrice colonne à n lignes , et $B = X\,{}^tX$. Soit I la matrice unité d'ordre n .

1) Calculer B^p en fonction de B .($p \in \mathbb{N}$)

2) Soit $A = aI + bB$ et $p \in \mathbb{N}$.

a) Calculer A^p en fonction de I et B .

b) Calculer A^p en fonction de I et A .

Ex 4: Soit M_a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $E = \{M_a \,/\, a \in \mathbb{R}\}$.

1) Montrer que E est un groupe multiplicatif commutatif .

2) Soit φ de $\mathbb{R}$ dans E définie par $\varphi(a) = M_a$. Montrer que φ est un isomorphisme de groupes .

3) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$: $M_a^3 - 3M_a^2 + 3M_a - I_3 = 0$.

Ex 5: **a)** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Calculer A^2 ; A^3 ; A^4 et plus généralement A^n , $n \in \mathbb{R}$.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; démontrer que B est inversible et calculer B^{-1} .

(Utiliser la relation $(I-A)(I+A+A^2+A^3) = I - A^4$ avec I matrice unité)

c) a étant un nombre réel calculer l'inverse de $C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

T.S.V.P

Ex 6: Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -7 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Ex 7: Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n , I la matrice unité , on suppose que I-AB est inversible .
Vérifier que $(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1} A$.

Ex 8: **a)** Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe deux scalaires α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$. Démontrer que A^n est de la forme $u_n A + v_n I$ où u_n et v_n sont des scalaires que l'on déterminera en fonction de n .

Ex 9: Soit $\alpha = \exp(\frac{2i\pi}{n})$ racine n^ème de l'unité . On pose : $M(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \dots & \alpha^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha^{n-1} & \alpha^{2(n-1)} & \dots & \alpha^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$

Calculer $M(\alpha)M(\frac{1}{\alpha})$ et en déduire $(M(\alpha))^{-1}$.

Ex 10: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B = aI + bA$.

1) Calculer B^p pour $p \in \mathbb{N}$

2) Conditions sur a et b pour que B soit inversible ?

3) La formule obtenue en **1)** se généralise-t-elle à $p \in \mathbb{Z}$?

Ex 11: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **1)** Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2) A est-elle inversible ?

Ex 12: Soit $M = ((m_{ij})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ (appelé trace de M) .

a) Montrer que Tr est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\forall\ (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $Tr(MN) = Tr(NM)$.

Feuille d'exercices numéro 14 Bis:

Exemples d'étude de système d'équations linéaires
Exemples d'utilisation de la méthode du pivot de Gauss .

2007 -2008

Ex 1: Calculer l'inverse des matrices suivantes en utilisant la méthode de Gauss .

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-5&7\\7&1&-5\\-5&7&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\1&-2&2&-3\\0&1&-1&1\\-2&3&-2&3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&1&1&-1\\1&1&5&1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}.$$

Ex 2: Déterminer le rang des matrices suivantes : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ fixé .

a) $A=\begin{pmatrix}2&-3&-4\\3&1&5\\-1&0&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}1&-i&i&1\\i&1&1&i\\1&i&3i&3\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\b&a&b&0\\0&b&a&b\\0&0&b&a\end{pmatrix}$

Ex 3: Résoudre et discuter suivant les valeurs des complexes a,b,c le système d'inconnues x,y et z complexes :

$$(S)\begin{cases}x+y+z=a+b+c\\ax+by+cz=a^2+b^2+c^2\\cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2\end{cases}$$

Ex 4: On considère dans $\mathbb{C}$ les deux systèmes linéaires :

$$(S_1)\begin{cases}(x-y+z-1)+j(x+y+z)+j^2(x+y-z+1)=0\\j(x-y+z-1)+j^2(x+y+z)+(x+y-z+1)=0\\(x-y+z-1)-2(x+y+z)+(x+y-z+1)=0\end{cases}\qquad(S_2)\begin{cases}x-y+z=1\\x+y+z=0\\x+y-z=-1\end{cases}$$

1) Les systèmes (S_1) et (S_2) sont-ils équivalents ?

2) Résoudre (S_1) .

Ex 5: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases}x-5y+7z=1\\7x+y-5z=1\\-5x+7y+z=1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}-x+y+z+t=1\\x+y+z-t=1\\x+y+5z+t=1\\x-y+z+t=1\end{cases}$

Ex 6: Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases}2x+y+z+t=3\\x+2y+z+t=1\\x+y+2z+t=2\\x+y+z+2t=4\\x-y+z-t=0\end{cases}$

Ex 7: Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , le système suivant :

$$\begin{cases}x+y+z=m+1\\mx+y+(m-1)z=m\\x+my+z=1\end{cases}$$

Feuille d'exercices numéro 14 Ter:

Remplacement de l'heure de Physique

2007 -2008

On considère les éléments suivants de $M_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On note E le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a. Montrer, pour tout entier naturel n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$

b. Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$

c. Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L , L^2 et n.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.
Est-ce que f est diagonalisable ?

5.a. Soit $w = (1,0,0)$.
Calculer $v = (f-e)(w)$ et $u = (f-e)(v)$.
Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

c. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.