Feuille d'exercices numéro 13

2007 -2008

Ex 1: Soit $E = \mathbb{R}^3$, soit $\vec{u} = (1,-1,1), \vec{v} = (0,-1,2)$ et $\vec{w} = (1,-2,3)$.

a) Montrer que la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est liée .

b) Trouver une base de $F = \text{Vect}\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$.

c) On pose $G = \{ (x,y,z) \in E \,/\, x + 2y + z = 0 \}$.
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E .
Déterminer une base de G .
Montrer que F = G .

Ex 2: Soit T un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
Soit M l'ensemble des vecteurs de E invariants par T .

a) Montrer que M est un sous-espace vectoriel de E .

b) Déterminer $M \cap \text{Ker}(T)$.

c) Quand T est projecteur , préciser un supplémentaire de M .

Ex 3: Soit E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur l'ensemble des dix chiffres {0;1;2;...;9} et soient E_1 et E_2 les sous-ensembles de E définis respectivement par les conditions : f(0)=f(1) ; 3f(0)+7f(1)=-2 .
E ; E_1 et E_2 sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$? Si c'est le cas préciser leur dimension .

Ex 4: Montrer que si deux formes linéaires sur un $\mathbb{R}$-ev E de dimension 2 sont nulles simultanément pour un même vecteur X non nul de E ; alors elles sont nécessairement liées .

Ex 5: Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev E de dimension finie . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

a) E = Kerf + Imf

b) $E = \text{Kerf} \oplus \text{Imf}$

c) Imf = Im(fof)

d) Kerf = Ker(fof) .

Ex 6: Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 rapporté à une base $\{e_1 ;e_2 ;e_3\}$. $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E . Soit Id_E l'identité de E et on définit f par $f^n = f^{n-1} \circ f$ pour $n \geq 2$.
On donne $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $f(e_1) = e_3$; $f(e_2) = e_1$; $f(e_3) = e_2$.

a) Déterminer: $(f-Id_E)(e_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$ et : $(f^2 +f+Id_E)(e_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$.

b) Montrer que $f^3 = Id_E$ .En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1} .

c) Déterminer les noyaux de $f-Id_E$ et de $f^2 +f+Id_E$. En donner les dimensions . En déduire la dimension de $\text{Im}(f-Id_E)$ et de $\text{Im}(f^2 +f+Id_E)$

Ex 7: Soient les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = e^{3x}$ et $f_2(x) = xe^{3x}$.
Soit $E = \{af_1 +bf_2$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \}$

a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que $(f_1 ; f_2)$ est une base de E .

c) Soit φ définie sur E par $\varphi(f) = f'$. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
Déterminer $\varphi(f_1)$ et $\varphi(f_2)$.

d) Calculer φ^n .

e) Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $f : x \mapsto (3x+1)e^{3x}$.

T.S.V.P

Ex 8: Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

a) Montrer qu'il existe un élément x de $\mathbb{R}^n$ tel que la famille $\{x;u(x);u^2(x)\}$ soit une famille libre

b) En déduire que $n \geq 3$.

c) On suppose n=3 ; Quelles sont les images de x ; u(x) et $u^2(x)$ par u .

Déterminer Imu et Keru .

Ex 9: Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Démontrer que Rang(f) - Rang(gof) = Dim (Imf $\cap$ Kerg)

Ex 10: Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 . Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

On note F = $\{ \vec{v}(x,y,z) / \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ z = -2x \end{cases} \}$.

a) Déterminer une base de F .

b) Compléter cette base en une base de E .

Ex 11: On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique . Déterminer suivant les valeurs de α le rang du système suivant : $a = (1;1;\alpha)$; $b = (1;\alpha;1)$; $c = (\alpha;1;1)$.

Ex 12: Soit E= $\mathbb{R}_n[X]$ .Montrer que les n+1 polynômes $P_0(X)=1$; $P_1(X) = X + P_0(X)$; $P_2(X) = X^2 + P_1(X)$; **...** ; $P_n(X) = X^n + P_{n-1}(X)$ forment une base de E .

Ex 13: Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = a\cos(x-\varphi)$ avec $(a,\varphi)\in\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev .

b) Quelle est sa dimension ?

Ex 14: Soit f_1 , f_2 et f_3 les fonctions définies sur]-2;2[par $f_1(x) = \frac{1}{x-2}$, $f_2(x) = \frac{1}{x+3}$ et $f_3(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$.

Déterminer Dim Vect $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Ex 15: Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Montrer que la famille $\{ f(x) , f(x+1) , f(x+2) \}$ est libre si et seulement si $a \neq 0$.

Ex 16: Soient f et g deux endomorphismes de E .

a) Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Im}f$.

b) Etudier le cas $f = g$.

Feuille d'exercices numéro 13 Bis

Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille finie de vecteurs . Exemples de construction de bases et de sev supplémentaires .

2007-2008

Ex 1: Discutez suivant les valeurs de a , le rang du système S = {X,Y,Z,T} où X , Y , Z et T sont les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis par X = (1,a,1,4) ; Y = (1,1,-1,2) ; Z = (-1,1,3,0) et T = (2,1,-3,a) .

Ex 2: Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables en 0 .
a) Montrer que S = { f ∈ E / f (0) = f'(0) = f''(0) = 0 } est un sous-espace vectoriel de E .
b) Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un supplémentaire de S .

Ex 3: Soit F ={ P ∈ $\mathbb{R}_n[X]$ / P(1) = 0 }
a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Déterminer une base de F .

Ex 4: Soit a ∈ $\mathbb{R}$, on pose E = Vect {(a,1,0,a);(2a,0,1,0)} et F = Vect{(2,1,a,0);(a,0,0,1)} .
Déterminer une base de E ∩ F .

Ex 5: Soit E ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 .
On note $P_1 = (1-X)^3$, $P_2 = X(1-X)^2$, $P_3 = X^2(1-X)$ et $P_4 = X^3$.
Montrer que $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ base de E .

Ex 6: Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Ex 7: Soit E = $\mathbb{C}_n[X]$ avec n ∈ $\mathbb{N}$, n ≥ 2 , et φ : E → E définie par φ(P) = P(X+1)+P(X-1)-2P(X) .
a) Montrer que φ ∈ $\mathcal{L}$(E) .
b) Déterminer le noyau et l'image de φ .
c) Soit H ∈ $\mathbb{C}[X]$, montrer qu'il existe des solutions à l'équation (E) : P(X+1)+P(X-1)-2P(X) = H d'inconnue P∈ $\mathbb{C}[X]$ et trouver toutes les solutions .

Ex 8: Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 dont une base est $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.
Soit φ ∈ $\mathcal{L}$(E) défini par : $\varphi(\vec{i}) = -\vec{j} - \vec{k}$, $\varphi(\vec{j}) = -\vec{i} - \vec{k}$, $\varphi(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
a) Calculer φoφ .
b) Déterminer Kerφ et Imφ .