Feuille d'exercices numéro 10

2007 -2008

Ex 1: Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $A = 3X^5 + 5X^4 + 6X^3 + 2X^2$ par $B = X^2 + X + 1$.

Ex 2: Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le reste de la division euclidienne de $A = X^n$ par B dans les cas suivants :
a) $B = X+2$ **b)** $B = X^2 - 6X - 16$ **c)** $B = X^{n+3} - 1$

Ex 3: Déterminer $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ pour que le polynôme $B = X^2 + 2$ divise le polynôme $A = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Ex 4: Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $P_n = X^{n+1} \cos(n-1)\varphi - X^n \cos n\varphi - X\cos\varphi + 1$.
Démontrer que P_n est divisible par $A = X^2 - 2X\cos\varphi + 1$ et trouver le quotient .

Ex 5: Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $B = (X-2)^n$ avec n entier naturel non nul .

Ex 6 : Montrer que $P_n = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\cdots(1+X^{2^n}) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k$

a. Par récurrence.
b. En multipliant P_n par X-1.

Ex 7: Démontrer que $P = X^{10} - 2X^9 + X^8 - 2X^6 + 4X^5 - 2X^4 + X^2 - 2X + 1$ est divisible par $(X-1)^4$.

Ex 8: $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P = X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$.
Démontrer que 1 est racine de P ; quel est son ordre de multiplicité ?

Ex 9: On note P_n le polynôme tel que $P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}$

a) Montrer que P_n n'a pas de racines multiples .
b) Discuter le nombre de racines réelles de P_n .

Ex 10: Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$, tels que $P(2X) = P'(X)\,P''(X)$.

Ex 11: Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles l'équation : $(x+1)^n - x^n - \lambda = 0$ admet une racine multiple avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

Ex 12: Soient f et g les deux polynômes suivants : $f = X^2 - 4X + 5$ et $g = X^3 - (1+2i)X^2 - 3X + 2i - 1$

a) Montrer que f et g ont une racine commune α que l'on calculera .
b) En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{f}{g}$ sur le corps $\mathbb{C}$.

Ex 13: Soient u et v les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définies par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$ $u(P) = XP$ et $v(P) = P'$

1) Montrer que u et v sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2) Déterminer $vou - uov$.
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $vou^n - u^n ov = nu^{n-1}$. (où $u^n = uouo\ldots ou$ (n termes) et $u^0 = Id$)

T.S.V.P

Ex 14 : Les polynômes d'interpolation de Lagrange :

a.On donne $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ avec $x_1 \neq x_2$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{K}$. On pose alors :

$\mathrm{L(X)} = \dfrac{\mathrm{X} - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \dfrac{\mathrm{X} - x_1}{x_2 - x_1} y_2$. Vérifier que $\mathrm{L}(x_1) = y_1$ et $\mathrm{L}(x_2) = y_2$.

b.Généralisation :

Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ tous distincts et $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{K}$.

Déterminer un polynôme L de degré inférieur ou égal à n-1 tel que $\mathrm{L}(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [1,n]$

Montrer l'unicité de L.

c.Corollaire : Démontrer que si K est fini, alors $K[x] = K^K$ autrement dit que toute application de K vers K est polynomiale.

Ex 15: Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient f de E dans E telle que f (P) = P - P' et g de E dans E telle que $g(P) = P + P' + ... + P^{(n)}$.

1) Montrer que f et g sont des endomorphismes de E .

2) Déterminer gof . En déduire que f est bijective et trouver f^{-1} .

3) Soit $Q = 2X^4 - 4X^3 + 3X^2 + X - 6$. Déterminer l'unique polynôme P de E tel que f(P) = Q .

Ex 16: Soit φ de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

2) Déterminer le noyau de φ .

Ex 17 : Soit $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$.

a. Déterminer les racines complexes de P_n ; donner sa factorisation dans $\mathbb{C}$ [X].

b. Calculer la somme des racines de P_n , le produit de ses racines, la somme du carré de ses racines.

c. En déduire que si $n = 2p+1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \tan(k\frac{\pi}{n}) = \sqrt{n}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{cotan}^2\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$.

Ex 18 : Dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que X^3+pX+q possède une racine multiple si et seulement si $4p^3+27q^2=0$.

Ex 19 : Soit $P=X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$ un polynôme à coefficients réels. Supposant que P possède une racine $z_1 \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \notin \mathbb{R}$ et $|z_1| \neq 1$, trouver les trois autres racines de P dans $\mathbb{C}$ en fonction de z_1.

Ex 20 : Soit $P=X^3+pX^2+qX+r \in \mathbb{C}[X]$

a. Prouver que P a une racine égale à la somme des autres si et seulement si $P(-(p/2)) = 0$.

b. Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que P ait ses racines en progression arithmétique.

c. Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que P ait ses racines en progression géométrique.

Ex 21: Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

1) $\dfrac{X^4 - 3X^3 + X}{(X+1)^3(X^2 + X + 1)}$

2) $\dfrac{X^7 + 4X^5 + 9X^3 + 2X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$

Feuille d'exercices N°10 bis

Exemples d'obtention de polynômes satisfaisant à des conditions données . Exemples d'étude d'équations algébriques .

2007-2008

Ex 1: **1)** Déterminer un polynôme P de degré 3 , unitaire , tel que : P(0) = 0 , P(1) = 1 et P(2) = 2 ;

2) a étant un nombre réel , étudier la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = P(u_n) \end{cases}$.

Ex 2: On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $P_0=1$ et pour $n\geq 1$ $\begin{cases} P'_n = P_{n-1} \\ P_n(0)+P_n(1)=0 \end{cases}$

a) Vérifier que ces relations définissent bien des polynômes P_n .

b) Montrer que P_n est de degré n .

c) Calculer P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .

d) Montrer que pour tout $n\geq 0$, on a la relation (1) suivante : $P_n(X)+P_n(X+1)=\dfrac{2X^n}{n!}$

e) Montrer que la relation (1) suffit à déterminer complètement $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

f) Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a la relation : $P_n(1-X)=(-1)^n\ P_n(X)$.

g) Que peut on en déduire pour $P_n(\frac{1}{2})$ si n impair et pour $P_n(0)$ et $P_n(1)$ si n est pair .

Ex 3: Trouver tous les polynômes P , non nuls , de $\mathbb{C}[X]$, tels que : $P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0$ (pour cela on s'interessera aux racines d'un polynôme solution) .

Ex 4: CNS portant sur $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ pour que a,b,c soient les solutions de l'équation $z^3+az^2+bz+c=0$

Ex 5: **1)** Démontrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine positive u_n .

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente .

3) Calculer la limite de la suite (u_n) .

Ex 6: Déterminer $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que les racines de $z^4 - 8z^3 + \lambda z^2 - 8z - 3 = 0$ dans $\mathbb{C}$ vérifient $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$.
Résoudre l'équation dans ce cas .

Ex 7 : Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P'_n = X^n$.
Calculer P_n pour tout n .

Ex 8 : Déterminer a et b pour que $P = X^4 + 4X^3 - 4aX + 4b$ admette une racine double $\alpha + \beta\sqrt{3}$ avec α et β rationnels .

Ex 9 : Déterminer P polynôme à coefficients réels de degré 3 tel que : P(-1) = 0 et les restes des divisions euclidiennes par (X – 1) , (X – 2) et (X – 3) soient égaux à 10 .

Ex 10 : Soient a , b et c les racines de $X^3 - X + 1 = 0$.

1) Déterminer le polynôme de degré 3 dont les racines sont a^3 , b^3 et c^3 .

2) En déduire $a^6 + b^6 + c^6$.