# Devoir Surveillé N°2

**20 Octobre 2007**
**Durée 4h**

*(l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS)*

## Exercice N°1: *(5 points)(BAC S 1995)*

On se place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ .
A , B et C désignent les points d'affixes respectives $a$ , $i$ et -1 .
On note $g$ l'application qui , à tout point M du plan , d'affixe $z$ , associe le point $g$(M)
d'affixe : $z' = \dfrac{a+z+iz}{3}$ .

**1)** **a)** A tout point M d'affixe $z$ , on fait correspondre le point $M_1$ d'affixe $iz$ .
On note M ' l'isobarycentre des points A , M et $M_1$ . Exprimer l'affixe de M' en fonction de $z$ .
**b)** Montrer que $g$(B) = O si et seulement si $a = 1 - i$ , et que dans ces conditions les points O , A et I sont alignés , I désignant le milieu de [B,C] .

Dans toute la suite de l'exercice , on prend $a = 1 - i$ .

**2)** **a)** Prouver que $g$ est une similitude directe dont on précisera le centre $\Omega$, le rapport et une mesure de l'angle .
**b)** Prouver que les points A , B et $\Omega$ sont alignés .

**3)** **a)** Déterminer la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI}}\right)$
Montrer que l'image de la droite (OB) par $g$ est la droite (OI) .
**b)** Soit O' l'image de O par $g$ . Montrer que la droite (OO') est l'image par $g$ de (BO) .
**c)** En déduire que les points I, O et O' sont alignés .

**4)** Montrer que les points I et $\Omega$ appartiennent au cercle de diamètre [BO'] .

## Exercice N°2: *(4 points)(CCP TSI 2006)*

**1)** On considère l'équation différentielle $(E_1)$ : $xy' - y = \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

**a)** Résoudre l'équation différentielle $(E_1)$ .

**b)** Préciser la solution $f$ de l'équation $(E_1)$ telle que $f(1) = 0$ .

**2)** On considère l'équation différentielle $(E_2)$ : $x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

**a)** Déterminer une solution particulière de l'équation homogène associée de la forme $y(x) = x^\alpha$ avec $\alpha$ réel .

**b)** Chercher une autre solution de l'équation homogène associée de la forme $y(x) = k(x)x^\alpha$ en donnant à $\alpha$ la valeur trouvée à la question précédente .

**c)** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée .

**d)** Vérifier que la fonction $y_0 : x \mapsto -1 - \ln(x)$ est une solution particulière de $(E_2)$.

**e)** En déduire l'ensemble des solutions de $(E_2)$.

**f)** Montrer que la fonction $f$ définie au 1)b) est l'unique solution de $(E_2)$ telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$ .

**T.S.V.P**

**Exercice N°3:** *(4 points)*

Soit $\mathscr{D}_1$ la droite d'équations : $\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y-3z+1=0 \end{cases}$ et $\mathscr{D}_2$ celle d'équations : $\begin{cases} x+y+2z+1=0 \\ 2x+y+z+2=0 \end{cases}$

On note $\Delta$ la perpendiculaire commune à ces deux droites .

**1)** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ contenant $\mathscr{D}_1$ parallèle à $\Delta$ .

**2)** Déterminer des équations cartésiennes de $\Delta$ .

**3)** Calculer la distance de ces deux droites .

**Exercice N°4:** *(3 points)(ISFA 2006)*

On considère l'équation différentielle $(E)$: $(x^2-1)y'+xy=x^3-x$ .

**1)** Déterminer une fonction polynôme $p$ solution de l'équation $(E)$ sur $\mathbb{R}$ .

**2)** Résoudre l'équation $(E)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[,]-1;1[$ et $]1;+\infty[$ .

**3)** Expliquer pourquoi la seule solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ est $p$ .

**Exercice N°5:** *(4 points)(D'après Ales 2006 spécifique)*

Soit $\alpha$ un nombre réel donné .
On considère les équations différentielles suivantes :
$(\mathrm{E}_1)$ : $x^2y''+(1-2\alpha)xy'+\alpha^2y=(\alpha-2)^2x^2-\alpha^2$ et $(\mathrm{E}_2)$ : $x^2y''+(1-2\alpha)xy'+\alpha^2y=0$.

**1)** **a)** Soit $h$ une fonction quelconque de classe $\mathrm{C}^2$ définie sur $]0;+\infty[$ .
On définit alors $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $k(u)=h(e^u)$. Exprimer $k'(u)$ et $k''(u)$ à l'aide des dérivées première et seconde de $h$ .
**b)** Montrer que $h$ est solution de $(\mathrm{E}_2)$ si et seulement si on a : $\forall u\in\mathbb{R}$, $k''(u)-2\alpha k'(u)+\alpha^2k(u)=0$.
**c)** Déterminer l'expression de $k(u)$ pour $u\in\mathbb{R}$ lorsque $h$ est solution de $(\mathrm{E}_2)$.
**d)** En déduire les solutions de $(\mathrm{E}_2)$ sur $]0;+\infty[$ .

**2)** **a)** Déterminer une solution polynomiale de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_1)$ .
**b)** En déduire les solutions de $(\mathrm{E}_1)$ sur $]0;+\infty[$ .