Devoir N°6

Pour le 31 Janvier 2006

Exercice

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

1) Calculer sous forme simplifiée les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3.

2) Calculer $L_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Déterminer le degré de L_n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$) et donner son coefficient dominant sous la forme d'une somme.

4) En utilisant un changement d'indice, montrer que L_n a la même parité que n.

5) Vérifier, à l'aide de la formule de LEIBNIZ, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n} \left[(X^2-1)^n \right].$$

6) En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n, puis la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

7) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |L_n(x)| \leqslant \left(\frac{1+|x|}{2} \right)^n \binom{2n}{n}.$$

8) On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme $U_n(X) = (X^2-1)^n$.

a) Vérifier que :

$$(X^2-1)U_n'(X) = 2nXU_n(X).$$

b) En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(L_n) = n(n+1)L_n.$$