



Devoir N°3

Pour le
25 novembre 2005

Exercice :

Soit E un ensemble non vide, soit A un sous-ensemble de E , on appelle fonction caractéristique de A l'application notée χ_A telle que :

$$\chi_A : E \rightarrow \{0;1\} \text{ où } \begin{cases} \chi_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ \chi_A(x) = 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On note $H = F(E, \{0;1\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$.

On pose $\delta : P(E) \rightarrow H$ telle que $\forall A \in P(E), \delta(A) = \chi_A$.

- 1) a) Soit $f \in H$, on pose $B = \{x \in E / f(x) = 1\}$
Montrer que $\forall x \in E, \chi_B(x) = f(x)$, en déduire que f est surjective.
b) Montrer que δ est injective. Conclure.

- 2) a) Montrer que $\delta(A \cap B) = \delta(A) \delta(B)$.
b) Montrer que $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B) - \delta(A) \delta(B)$.
c) Montrer que $\delta(C_E A) = 1 - \delta(A)$.
d) En déduire que $\delta(A \setminus B) = \delta(A) - \delta(A) \delta(B)$.

- 3) $\forall (A,B) \in (P(E))^2$, on pose $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
a) Calculer $\delta(A \Delta B)$.
b) Calculer $\delta((A \cup B) \setminus (A \cap B))$.
c) Conclure.

- 4) a) $\forall A \in P(E)$, calculer $A \Delta \emptyset$ et $A \Delta A$.
b) Montrer que $(P(E), \Delta)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.
c) On note \oplus la loi définie dans H par :
 $\forall (f,g) \in (H)^2, f \oplus g : x \mapsto f(x) + g(x) - 2f(x)g(x)$.
Montrer que (H, \oplus) est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

- 5) Que peut-on dire de δ ?