Devoir N°2

Pour le 4 Novembre 2005

Exercice :

$\mathcal{P}$ est le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$; A est le point de coordonnées $(1,0)$.
$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O de rayon 1 .
f est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z)=2z-z^2$.
F est l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe Z égale à $f(z)$.
Le but de cet exercice est d'étudier l'image $\mathcal{K}$ du cercle $\mathcal{C}$ par F .

Partie A

Soit m un point de $\mathcal{C}$ d'affixe z et M son image par F .
1) Soient m_1 et m_2 les points d'affixes respectives z^2 et $2z$.
Quels sont les modules de $z, 2z$ et z^2 ? Donner les arguments de $2z$ et z^2 en fonction de celui de z .

2) Montrer que le quadrilataire O m_1 m_2 M est un parallélogramme .

3) En déduire une construction géométrique simple de M à partir de m .

Partie B

Soit e^{it} , $t\in[-\pi,\pi]$ l'affixe d'un point m de $\mathcal{C}$.
1) Calculer $f(e^{it})$ et en déduire que l'image $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}$ par F est la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} X(t)=2\cos(t)-\cos(2t) \\ Y(t)=2\sin(t)-\sin(2t) \end{cases} \quad t\in[-\pi,\pi] .$$

2) a) Montrer que les points d'affixes $f(e^{it})$ et $f(e^{-it})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
Qu'en déduit-on pour $\mathcal{K}$?
b) Etudier sur l'intervalle [0 , π] les variations des fonctions X et Y de la variable t .

3) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{mM}$ est orthogonal à la tangente à $\mathcal{K}$ en M .

4) Construire les points de $\mathcal{K}$ où la tangente est parallèle aux axes de coordonnées .

5) Tracer $\mathcal{K}$.