



## Devoir Surveillé N°1

29 Septembre 2007

Durée 3h

(l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS)

### Exercice N°1: (5 points)

- 1) On pose  $f(x) = \cos(3\arctan(x))$ 
  - a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
  - b) Calculer  $f'$ , la dérivée de  $f$ .
- 2) Exprimer  $\cos(3y)$  en fonction de  $\cos(y)$  avec  $y$  nombre réel.
- 3) Soit  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , calculer  $\cos(\theta)$  en fonction de  $\tan(\theta)$ .
- 4) En déduire une expression simplifiée de  $f(x)$ .

### Exercice N°2: (5 points)

Soit  $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f : D_f$ .
- 2) Montrer que  $f$  est périodique.
- 3) Étudier la parité de  $f$ .
- 4) Étudier  $f$  sur  $[0, \pi[$ . (On cherchera à simplifier)
- 5) En déduire  $f$  sur  $]-\pi, 0]$ .
- 6) Représentez graphiquement  $f$  sur  $[-\pi, 2\pi]$ .

### Exercice N°3: (5 points)

- 1) Déterminer sous forme algébrique, les racines carrées de  $\sqrt{3} + i$ .
- 2) En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .
- 3) En utilisant  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ , calculer  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .
- 4) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin(x) = 2$ .
- 5) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $2z^2 - 2(1+i)z - \sqrt{3} = 0$ .

### Exercice N°4: (5 points) Soit $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $u^n = 1$ .
- 2) Résoudre l'équation  $E \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^n = e^{in\theta}$  avec  $\theta \in \left] 0, \frac{2\pi}{n} \right[$ .
- 3) Soit  $z_k$  une solution de  $E$ , simplifier la somme  $S = \sum_{p=0}^{n-1} \left( \frac{z_k + 1}{z_k - 1} \right)^p$ .