Devoir Surveillé N°9

5 Juin 2007
Durée 2h

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

Exercice N°1 : (10 points)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note Id l'application identique de $\mathbb{R}^n$.

Partie 1 : étude des symétries de $\mathbb{R}^n$.
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, non réduits au seul vecteur nul, et supplémentaires, c'est-à-dire tels que $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2$.
On appelle symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2, l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$ défini pour tout x de $\mathbb{R}^n$ tel que $x = x_1 + x_2$ (avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$) par $s(x) = x_1 - x_2$.
Dans les trois premières questions, on considère une telle symétrie notée s.

1) a. Montrer que : $\forall x \in F_1, s(x) = x$.
   b. En déduire que $\mathrm{Ker}(s - Id) = F_1$.
2) a. Montrer que : $\forall x \in F_2, s(x) = -x$.
   b. En déduire que $\mathrm{Ker}(s + Id) = F_2$.

Partie 2 : étude de deux exemples.
1) Soit s un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $s \circ s = Id$.
   Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$: $x + s(x) \in \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $x - s(x) \in \mathrm{Ker}(s + Id)$.
2) En déduire que $\mathrm{Ker}(s - Id)$ et $\mathrm{Ker}(s + Id)$ sont supplémentaires.
3) Établir enfin que s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + Id)$.

Partie 3 : symétries orthogonales.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne usuelle dans lequel le produit scalaire canonique est noté $< , >$. On dit que f est symétrique ssi $\forall\, (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, < f(x), y > = < x, f(y) >$
Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, non réduit au seul vecteur nul et différent de $\mathbb{R}^n$, on appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.

1) Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Montrer que la matrice $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

est la matrice d'une symétrie orthogonale.
2) On considère une symétrie s de $\mathbb{R}^n$ et on se propose d'établir l'équivalence suivante :
   s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.
   a. On suppose que s est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.
      Vérifier que : $\forall x \in \mathrm{Ker}(s - Id), \forall y \in \mathrm{Ker}(s + Id), < x, y > = 0$, puis conclure que s est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id)$.
   b. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non réduit au seul vecteur nul et différent de $\mathbb{R}^n$.
      On prend maintenant l'hypothèse : s est la symétrie orthogonale par rapport à F.
      En écrivant $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F \times F^{\perp}$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(y_1, y_2) \in F \times F^{\perp}$,
      montrer que : $\forall (x, y) \in E^2, < s(x), y > = < x, s(y) >$. Conclure.

3) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non réduit au seul vecteur nul et différent de $\mathbb{R}^n$.
Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F et p la projection orthogonale sur F.

a. Montrer que $s = 2p - Id$.

b. En déduire que si $(u_1, ..., u_p)$ est une base orthonormale de F, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ s(x) = 2\sum_{i=1}^{p} < x, u_i > u_i \ - x.$$

4) Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et que F a pour équation : $x - 2y + 3z = 0$.

a. Déterminer une base orthonormale de F.

b. En déduire la matrice N, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice N°2 : (10 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \text{ et g celui de matrice } B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que f est une isométrie vectorielle.

2) Déterminer F=Ker(f-Id) .

3) a) Déterminer une base $\mathscr{B}$ orthonormale (u,v,w) de $\mathbb{R}^3$ où u est un vecteur normé de Ker(A+I).

b) Exprimer les vecteurs f(u),f(v) et f(w) en fonction des vecteurs u , v et w .

c) En déduire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

d) Donner les éléments caractéristiques de f .

4) Déterminer G=Ker(g+Id) .

5) On pose s réflexion vectorielle par rapport à P d'équation $-x + y + z = 0$.

a) Déterminer la matrice S de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer M = S x B . Déterminer la nature de M .

c) On note r l'endomorphisme de matrice M , Déterminer les éléments géométriques de g .

6) En déduire la nature de h de matrice $C=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \\ 3 & 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$. (On pourra calculer BxA)