Devoir Surveillé N°6

24 Mars 2007
Durée 4h

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

Exercice N°1 : (3 points)

Soit $f : x \mapsto \arcsin(3x - 4x^3)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) Calculer f' et déterminer les variations de f .

3) En simplifiant f' , déterminer une écriture simplifiée de f .

Exercice N°2: *(Ecricome 97 Techno)(7 points)*

On considère la fonction numérique réelle f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, f(x) = x^2 \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$.

On note C la représentation graphique de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On désigne par h la fonction numérique réelle définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, h(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{x}{x^2-1}$.

a) Déterminer , en les justifiant , les limites de h quand x tend vers 1 , puis quand x tend vers $+\infty$.

b) Calculer la dérivée de h et en déterminer le signe .

c) Donner le tableau de variations de h .

d) Montrer l'existence d'un unique réel strictement positif , noté α , tel que : $h(\alpha) = 0$.

2) **a)** $\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$.

b) En déduire le tableau de variation de f .

c) Montrer que : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3}{\alpha^2 - 1}$.

3) **a)** Vérifier que , $\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$: $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$.

b) Etudier les variations des fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par :

$$\varphi(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2x - x^3 \text{ et } \psi(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2x - \frac{2}{3}x^3 .$$

c) Prouver alors que , pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$2x + \frac{2x^3}{3} \leq \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leq 2x + x^3 .$$

d) Déduire des questions précédentes la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

e) En utilisant les questions précédentes , montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C , et déterminer la position de la courbe par rapport à cette droite en $+\infty$.

4) Tracer C et (Δ) (On prendra 2 cm pour unité graphique) .

T.S.V.P

Exercice N°3: (2 points)

Soit $\varphi : P \mapsto XP'-P$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Déterminer l'image par φ de la base canonique $\{1, X, X^2\}$.

3) En déduire Ker φ et Im φ .

Exercice N°4: (5 points)

On désigne par E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels .

On note $S = \{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \}$.

1) Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E .

2) On pose $x_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et $y_n = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

a) Vérifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de S .

b) Montrer que $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} ; (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est une famille libre de E .

c) Soit φ définie de $\mathbb{R}^2$ dans E par

$\varphi(a,b) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = a ; u_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans S .

d) En déduire la dimension de S .

e) Donner une base de S .

3) On note $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de S telle que $\alpha_0 = 1 ; \alpha_1 = 1$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \in \mathbb{N}$.

b) Trouver l'expression de α_n en fonction de n .

c) Déterminer un équivalent de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Exercice N°5: (4 points)

On considère les matrices de $\mathbf{M_2}(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2.
   (b) Déterminer les réels a et b tels que $A^2 = aA + bI$.
   (c) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n $A^n = a_n A + b_n I$ avec : $\begin{cases} a_{n+1} = 10a_n + b_n \\ b_{n+1} = -24a_n \end{cases}$.

b (b) En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n .

3. (a) Déterminer pour tout entier naturel n : A^n .
   (b) En déduire l'expression de la matrice M^n, où $M = \dfrac{1}{6}A$.