Devoir Surveillé N°5

3 Février 2007
Durée 4h

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

Exercice N°1: (4 points)

1) On pose : $P = X^3 - (2-2i)X^2 + (5-4i)X + 10i$.

a) Montrer que P a un zéro imaginaire pur que l'on déterminera .

b) En déduire les zéros de P .

2) Soit $Q = X^4 - 2X^3 + 9X^2 - 8X + 20$.

a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de Q par $(X - 2i)$.

b) En déduire la décomposition de Q en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

c) Déterminer la décomposition de Q en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice N°2: (5 points)

n désigne un entier supérieur ou égal à 1 .

On considère la fonction f_n définie , pour tout *x* réel , par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1) Etudier les variations de f_n .

2) En déduire que , pour tout *n* entier supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

3) Montrer que : $u_n \leq \dfrac{1}{n}$; en conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite .

4) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$ et en déduire un équivalent de u_n. (On pourra utiliser **2)**)

5) Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{1}{n} - u_n$ lorsque *n* est au voisinage de l'infini .

Exercice N°3: (5 points) *(d'après Alès Sup 2000)*

Soit *n* un entier naturel non nul , on pose $A = (X+1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que l'on peut écrire $A = X^{\chi} B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré , le coefficient dominant et le terme constant noté b_0 .

2) Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \cdots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique .

On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$.

3) Montrer , à l'aide d'un changement d'indice , que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$.

En déduire que , si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

4) Calculer de deux façons : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis en déduire Q_n et enfin P_n .

5) On pose $F = \dfrac{1}{A}$, déterminer la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

T.S.V.P

Exercice N°4: (6 points) *(d'après E3A PC 2005)*

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X)=1, T_1(X)=X$ et la relation :

$\forall n\geq 1, T_{n+1}(X)=2XT_n(X)-T_{n-1}(X)$.

1) Déterminer les polynômes T_2 et T_3 .

2) a) Déterminer le degré T_m pour $m\in\mathbb{N}$.

b) Déterminer la parité de T_m pour $m\in\mathbb{N}$ (On distinguera deux cas selon que $m=2p$ ou $m=2p+1$.

c) Déterminer le coefficient dominant de T_m pour $m\in\mathbb{N}$.

3) a) Etablir par récurrence les relations suivantes pour tout nombre réel x :

$\forall n\in\mathbb{N}, T_n(\cos(x))=\cos(nx)$ et $T_n(\mathrm{ch}(x))=\mathrm{ch}(nx)$.

(On rappelle que $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, 2\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b)=\mathrm{ch}(a+b)+\mathrm{ch}(a-b)$)

b) En déduire que $|T_n(u)|\leq 1$ pour $|u|\leq 1$.

c) Soit $n\geq 1$, Montrer que pour tout u dans $]1;+\infty[$, $|T_n(u)|>1$. (On pourra poser $u=\mathrm{ch}(x)$) .

d) En déduire que si $n\geq 1$, pour tout u dans $]-\infty,-1[\cup]1;+\infty[$, $|T_n(u)|>1$.

4) a) Pour $n\geq 1$, résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $T_n(\cos(x))=0$.

b) En déduire que , pour tout entier $n\geq 1$, T_n a n racines réelles dans $[-1;1]$.

c) Soit $n\geq 1$, donner la décomposition de T_n en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

5) a) On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n} t^k e^{ikx}$. Calculer S_n et en déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$ lorsque $|t|<1$.

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} t^k\cos(kx)\right)$.

Exercice N°5: (2 points)

Soit E = $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels .

On pose $f: E\to E$ définie par $f(P)=XP'-P$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E .

2) Déterminer Ker f .

3) Soit k un entier , résoudre l'équation différentielle $xy'-y=x^k$.

4) En déduire Im f .