Devoir Surveillé N°4

13 Janvier 2007
Durée 4h

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

Exercice N°1: *(d'après ESC Eco 2006 4 points)*

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère l'équation notée (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x.

1. (a) Dresser le tableau des variations de g en précisant les limites aux bornes.

   (b) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.

2. Dans cette question on note $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout entier naturel } k, \ u_{k+1} = e^{u_k} - 2. \end{cases}$$

   (a) On rappelle que α_2 est le réel strictement négatif obtenu à la question 1.(b) lorsque $n = 2$. Calculer $g(-1)$ et $g(-2)$ puis montrer que $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.

   (b) Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.
   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k : $\alpha_2 \leq u_k \leq -1$.

   (c) Montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente et de limite α_2.

3. On revient au cas général où $n \geq 2$.

   (a) Montrer que $1 \leq g(\ln n) \leq n$. En déduire $g(\ln(2n)) \geq n$ (on donne $\ln 2 \approx 0{,}69$).

   (b) En déduire que $\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$, puis établir $\beta_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice N°2: *(5 Points - ESCP 91 Scientifique)*

(*On admettra le théorème suivant : Soit une fonction h de classe* C^1 *sur [a,b] telle que*
$\exists M \geq 0$ tel que $\forall x \in [a,b], |h'(x)| \leq M$ *alors on a l'inégalité suivante :* $|h(b) - h(a)| \leq M|b - a|$)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation : $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$.

1) **a)** Calculer la dérivée f' de f.

b) Montrer, en étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = (1 - x)e^x + 1$, que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α unique sur $\mathbb{R}^+$.

c) Prouver que $f(\alpha) = \alpha - 1$.

d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure de sa représentation graphique.

2) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation : $\varphi(x) = 1 + e^{-x}$.

a) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que $\alpha - 1 < e^{-1}$.

c) Etablir que, $\forall x \geq 1$, $\varphi(x) \geq 1$ et que : $|\varphi(x) - \alpha| \leq e^{-1}|x - \alpha|$.

d) Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1;+\infty[$ définie par $\alpha_0 = 1$ et par $\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$.

Montrer que pour tout nombre entier naturel n : $|\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$ et conclure.

T.S.V.P

Exercice N°3: *(4 points)*

On considère la suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence : $\forall\, n\in\mathbb{N}^* \quad u_n=\sqrt{n+u_{n-1}}$.

On se propose d'étudier le comportement de cette suite lorsque n tend vers l'infini .

1) **a)** Calculer u_1 et montrer que , pour tout entier naturel n : $u_n>0$.

b) Démontrer par récurrence que , pour tout entier naturel n : $u_n<u_{n+1}$.

2) Démontrer que , pour tout entier naturel non nul n : $u_n-\sqrt{n}=\dfrac{u_{n-1}}{u_n+\sqrt{n}}$.

3) Déduire de ce qui précède que l'on a , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1: $0<u_n-\sqrt{n}<1$.

4) Déterminer les limites des suites $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n>0}$ et $\left(\dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}\right)_{n>0}$.

5) Déduire des questions précédentes la limite de la suite $(u_n-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice N°4: *(4 points EDHEC Scientifique 2006)*

1) **a)** Montrer que l'on définit bien une unique suite $(u_n)_{n\geq 1}$, à termes strictement positifs , en posant : $u_1=1$ et , pour tout entier $n\geq 2, u_n=\dfrac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n-1}u_j$.

b) Vérifier que $u_2=\dfrac{1}{3}$, puis calculer u_3 .

2) **a)** Etablir que : $\forall\, n\geq 2, u_{n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}u_n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente .

c) Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

3) Montrer que $\forall\, n\geq 2, u_n=\dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$.

Exercice N°5: *(3 points)*

1) Calculer la somme $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$.

2) On suppose n et p entiers tels que $1\leq p\leq n$. Montrer que $p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}$ et en déduire $\sum_{p=1}^{n}p\binom{n}{p}$

3) En écrivant $p^2=p(p-1)+p$, calculer $\sum_{p=1}^{n}p^2\binom{n}{p}$