Devoir Surveillé N°3

9 Décembre 2006
Durée 4h

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

Exercice N°1: *(4 points)*

Soit E l'ensemble des entiers naturels .
On note F l'ensemble de tous les entiers impairs . On définit l'application f de E dans E par :
$\forall n \in \mathrm{E}, f(2n) = n$ et $f(2n+1) = n$.

1) Préciser l'ensemble G = complémentaire de F dans E .

2) **a)** Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{E})$.
b) Déterminer les ensembles $f(\mathrm{F})$ et $f(\mathrm{G})$.
c) Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{F})$.

3) **a)** f est-elle injective ?
b) f est-elle surjective de E dans E ?
c) On note g la restriction de f à F .
Montrer que g est bijective de F dans E .
d) Déterminer l'application réciproque de g .

Exercice N°2: *(4 points)*

Soit E et F deux ensembles et h une application de E dans F .
On rappelle que si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $y \in h(\mathrm{A})$ si et seulement s'il existe x dans A tel que $y = h(x)$.
et que si $\mathrm{A}' \subset \mathrm{F}$, $x \in h^{-1}(\mathrm{A}')$ si et seulement si $h(x) \in \mathrm{A}'$.

1) Montrer que pour tout $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in (\mathcal{P}(\mathrm{E}))^2$.
a) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow h(\mathrm{A}) \subset h(\mathrm{B})$.
b) $h(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = h(\mathrm{A}) \cup h(\mathrm{B})$.
c) $h(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset h(\mathrm{A}) \cap h(\mathrm{B})$.

2) Montrer que pour tout $(\mathrm{A}',\mathrm{B}') \in (\mathcal{P}(\mathrm{F}))^2$.
a) $\mathrm{A}' \subset \mathrm{B}' \Rightarrow h^{-1}(\mathrm{A}') \subset h^{-1}(\mathrm{B}')$.
b) $h^{-1}(\mathrm{A}' \cup \mathrm{B}') = h^{-1}(\mathrm{A}') \cup h^{-1}(\mathrm{B}')$.
c) $h^{-1}(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}') = h^{-1}(\mathrm{A}') \cap h^{-1}(\mathrm{B}')$.
d) $h^{-1}(\mathrm{C}_\mathrm{F}(\mathrm{A}')) = \mathrm{C}_\mathrm{E}(h^{-1}(\mathrm{A}'))$.
e) $h^{-1}(\mathrm{A}' \setminus \mathrm{B}') = h^{-1}(\mathrm{A}') \setminus h^{-1}(\mathrm{B}')$.

Exercice N°3: *(4 points)*

1) **a)** Montrer par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ et que $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ avec a_n et b_n entiers naturels .
b) En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n .

2) Etudier la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Etudier la limite de $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

T.S.V.P

Exercice N°4: *(4 points)*

Soit G l'ensemble $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Si $m=(x,y)$ et $m'=(x',y')$, on pose $m*m'=(xx'-yy' , xy'+x'y)$.

1) **a)** On pose $u=(1,0)$. Calculer $m * u$ pour tout $m=(x,y)$ de G .

b) Si $m=(x,y)$, on note $\mathrm{M}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Calculer $m * \mathrm{M}$.

c) Montrer que (G,*) est un groupe commutatif .

2) On note G' = $\mathbb{Q}^2\cap\mathrm{G}$ $=\{(x,y),x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q}\}-\{(0,0)\}$

Montrer que G' est un sous-groupe de (G,*) .

3) Soit g = $\mathbb{Z}^2\cap\mathrm{G}$, g est-il un sous groupe de G ?

4) Montrer que le sous-ensemble G' des éléments de g dont le symétrique pour * appartient à g est un sous-groupe de G .

5) Soit $f:\mathrm{G}\to\mathbb{C}^*$ définie par : $f((x,y))=x+iy$.

Montrer que f est un isomorphisme du groupe (G,*) dans le groupe ($\mathbb{C}^*,\times$) .

Exercice N°5: *(4 points)*

On note : $U=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ $S=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2$ et $T=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}^2$

1) **a)** Etablir par un raisonnement sur les sous-ensembles à n éléments d'un ensemble E de cardinal $2n$ que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$.

b) En déduire la valeur de U .

2) **a)** Montrer que $S=T$.

b) Calculer $S+T$ et en déduire S .