# Devoir Surveillé N°2

**18 Novembre 2006**
**Durée 4h**

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

## Exercice N°1: *(4 points)*

Trouver suivant les valeurs de $m$ les solutions de l'équation **(E) :** $my'' - (1-m)y' - y = xe^{-x}$ .

## Exercice N°2: *(8 points)* (d'après Mines d'Alès 2004)

**Partie I :**

**1)** Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\operatorname{th}(t) = 0$, où $z$ est une fonction de la variable réelle $t$ à valeurs réelles .
Trouver la solution $z_1$ de cette équation telle que $z_1(0) = 1$ .

**2)** Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\operatorname{th}(t) = t.\operatorname{th}(t)$.
Trouver la solution $z_2$ de cette équation telle que $z_2(0) = 0$.

**Partie II :**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal , on considère la courbe $\Gamma$ de représentation paramétrique définie par : $\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th}(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{cases}$ .

**3)** Démontrer que $\Gamma$ admet un axe de symétrie .

**4)** Etudier les branches infinies de $\Gamma$ .

**5)** Etudier les variations de $x$ et de $y$ ; faire un tableau .

**6)** Préciser la nature du point A d'abscisse 0 , ainsi que la tangente en ce point .

**7)** **a)** Calculer ch($t$) et th($t$) lorsque sh($t$) = 1 . Calculer la valeur de $t$ correspondante .
(on exprimera le résultat sous forme d'un logarithme népérien).
**b)** Déterminer le point B de $\Gamma$ où la tangente à pour coefficient directeur -1;
déterminer une équation cartésienne de la tangente en B à $\Gamma$ .

**8)** Donner l'allure de la courbe $\Gamma$ .

**9)** **a)** Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\Gamma$ au point M de paramètre $t$ .
**b)** Cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point N. Calculer la distance MN .

**T.S.V.P**

## Exercice N°3 :( *8 points*)

$\mathcal{P}$ est le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ ; A est le point de coordonnées (1,0) .
$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O de rayon 1 .
$f$ est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = 2z - z^2$ .
F est l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point m d'affixe $z$ associe le point M d'affixe Z égale à $f(z)$ .
Le but de cet exercice est d'étudier l'image $\mathcal{K}$ du cercle $\mathcal{C}$ par F .

**Partie A**

Soit m un point de $\mathcal{C}$ d'affixe $z$ et M son image par F .
**1)** Soient $m_1$ et $m_2$ les points d'affixes respectives $z^2$ et $2z$ .
Quels sont les modules de $z, 2z$ et $z^2$ ? Donner les arguments de $2z$ et $z^2$ en fonction de celui de $z$ .

**2)** Montrer que le quadrilataire O $m_1$ $m_2$ M est un parallélogramme .

**3)** En déduire une construction géométrique simple de M à partir de m .

**Partie B**

Soit $e^{it}$ , $t \in [-\pi,\pi]$ l'affixe d'un point m de $\mathcal{C}$ .
**1)** Calculer $f(e^{it})$ et en déduire que l'image $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}$ par F est la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} X(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) \\ Y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases} \quad t \in [-\pi,\pi] .$$

**2)** **a)** Montrer que les points d'affixes $f(e^{it})$ et $f(e^{-it})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
Qu'en déduit-on pour $\mathcal{K}$?
**b)** Etudier sur l'intervalle [ 0 , π ] les variations des fonctions X et Y de la variable $t$ .

**3)** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{mM}$ est orthogonal à la tangente à $\mathcal{K}$ en M .

**4)** Construire les points de $\mathcal{K}$ où la tangente est parallèle aux axes de coordonnées .

**5)** Tracer $\mathcal{K}$ .