Devoir Surveillé N°10

15 Juin 2007
Durée 4h

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

Problème N°1 : (10 points)

Dans tout le problème, f désigne l'application de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ telle que $\forall t > 0, f(t) = \dfrac{1}{t+1-e^{-t}}$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$. On ne cherchera pas à calculer $F(x)$. La première partie est consacrée à l'étude de f, la deuxième à l'étude de la solution de l'équation $f(x) = 1$, la troisième à l'étude de la fonction F.

Partie I.

1) Etudier f : sens de variation, limites en 0 et en $+\infty$.
2) Etudier la concavité de f. Représenter graphiquement f.
3) Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même. On désigne par f^{-1} l'application réciproque. Préciser le sens de variation et les limites de f^{-1}.
4) Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par x_n la solution de l'équation $f(x) = n$.
   a) Quel est le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$? Est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   b) Déterminer le nombre réel a tel que $f(t) \sim \dfrac{a}{t}$ lorsque $t \to 0$.
   c) En déduire un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Partie II.

Cette partie est consacrée à la recherche d'une valeur approchée par la méthode du point fixe du nombre réel x_1 défini en question I,4). On note $\beta = x_1$.

1) Montrer que β est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{-x} = x$, et justifier que $\dfrac{1}{e} \leq \beta \leq 1$.
2) Soient g l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = e^{-x}$, et I l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$. Montrer que $g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, et déterminer un réel $k \in \left]0,1\right[$ tel que $\forall x \in I, |g'(x)| \leq k$.

3) On considère la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels telle que

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = e^{-y_n} \end{cases}.$$

a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \in \mathrm{I}$.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\, y_n - \beta \,| \leq k^n |\, 1 - \beta \,|$.

c) La suite (y_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d) Déterminer un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |\, y_n - \beta \,| \leq 10^{-6}$.

e) Quelle est la valeur de y_{n_0} fournie par votre calculatrice ?

f) Conclure.

Partie III.

Cette partie, indépendante de la partie II, est consacrée à l'étude de l'application F de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$\mathrm{F}(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$.

1) Etude en $+\infty$.

a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{1}{t+1} \leq f(t) \leq \dfrac{1}{t}$.

b) En déduire la limite L de F en $+\infty$.

2) Sens de variation .

a) En utilisant une primitive φ de f sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$\forall\, x > 0,\ \mathrm{F}'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

b) Etudier le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Etude de F au voisinage de 0 .

On rappelle que $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right)$ lorsque $t \to 0$.

a) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c que l'on déterminera et une application continue ε de $\mathbb{R}_+^*$ vers IR tels que :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{a}{t} + b + ct + t\varepsilon(t) \\ \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0. \end{cases}$$

b) Montrer que $\int_x^{2x} t\,\varepsilon(t)\,dt = o\left(x^2\right)$ lorsque $x \to 0$ (indication : on pourra poser $m_x = \text{Max}\left\{|\,\varepsilon(t)\,|, t \in [\,x, 2x\,]\right\}$, et justifier que $\lim_{x\to 0} m_x = 0$).

c) Ecrire le développement limité d'ordre 2 de F en 0^+, sous forme $F(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + o\left(x^2\right)$.

d) On prolonge F par continuité en 0 en posant $F(0) = a_1$. F est-elle dérivable en 0 ? Quelles conclusions graphiques peut-on tirer du résultat obtenu en c) ?

4) Donner une allure de la représentation graphique de f, en faisant apparaître sur le dessin les conclusions obtenues dans les questions précédentes.

Problème N°2 : (10 points)

On note $p : x \mapsto e^x = \exp(x)$, $q : x \mapsto e^{2x} = \exp(2x)$ et $r : x \mapsto e^{x^2} = \exp(x^2)$. On note $\mathcal{B} = (p, q, r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

La partie IV est indépendante des autres parties.

Partie I

On se propose de prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$, au moyen de diverses méthodes. De par la définition de $\mathcal{E}$, il nous suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre ; soit donc a, b et c trois réels tels que $ap + bq + cr = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ désigne la fonction nulle).

1. – L'étudiant Antoine a évalué l'expression $(ap + bq + cr)(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$. Suivez sa démarche en l'expliquant, et concluez.

2. – Antoine a utilisé une propriété du nombre e ; laquelle ? Sauriez-vous justifier cette propriété autrement que par un argument du genre « *tout le monde sait bien que* $e \approx 2.71828$ » ?

3. – L'étudiant Nicolas a observé le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de l'application $ap + bq + cr$. Faites comme lui et concluez.

4. – L'étudiant Luc a eu une autre idée : il s'est intéressé au comportement de chacune des trois fonctions p, q, r au voisinage de $+\infty$. Reconstituez sa méthode et concluez.

5. – Au fait : quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $\left(f(0), f'(0), f(1)\right)$.

6. – Prouvez que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

7. – Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$. Exprimez a, b et c en fonction de $f(0)$, $f'(0)$ et $f(1)$.

Partie II

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\varphi(f) = Ap + Bq + Cr$ où

$$\begin{cases} A = \dfrac{2}{e-1}f(0) + f'(0) + \dfrac{2}{e(e-1)}f(1) \\ B = -\dfrac{1}{e-1}f(0) - \dfrac{1}{e(e-1)}f(1) \\ C = \dfrac{e-2}{e-1}f(0) - f'(0) - \dfrac{1}{e(e-1)}f(1) \end{cases}$$

8. – On note θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\theta(a,b,c) = (a,b,-c)$. Montrez que $\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$. En déduire que φ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

9. – Exprimez $\varphi(p)$, $\varphi(q)$ et $\varphi(r)$ en fonction de p, q et r.

10. – Écrivez la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.

11. – Déterminez $\varphi \circ \varphi$ et M^2. Que pouvez-vous dire de φ ?

Partie III

12. – On note $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par f. Montrez que $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f(1) = 0\}$. En déduire que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$; déterminez une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$; prouvez que $\mathcal{P}$ est de dimension deux ; exhibez une base (e_1, e_2) de $\mathcal{P}$.

13. – On note $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par f. Montrez que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$; prouvez que $\mathcal{D}$ est de dimension un, et déterminez des équations de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$. Exhibez une base (e_3) de $\mathcal{D}$, et donnez une caractérisation des éléments de $\mathcal{D}$.

14. – Montrez que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.

15. – Justifiez l'affirmation suivante : $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.

16. – Quelle est la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$? Caractérisez géométriquement φ.

Partie IV

On se propose de développer ici l'idée suivie par l'étudiant Luc dans la première partie (question 4). On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est nul ; pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée.

17. – Montrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Quelle est la dimension de $\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X]$?

18. – Soit $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition suivante :

$$\text{pour } 1 \leqslant k < q,\ P_{k+1}(x) - P_k(x) \text{ tend vers } +\infty \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty$$

On note $f_k = \exp \circ P_k$ l'application qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe $f_k(x) = e^{P_k(x)} = \exp\big(P_k(x)\big)$. Montrez que la famille $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ est libre.