Devoir Surveillé N°1

30 Septembre 2006
Durée 3h

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

Exercice N°1: *(5 points)*

On pose $C(t) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $S(t) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$ où n est un entier naturel non nul et t un réel .

1) Simplifier $C(t)$ et $S(t)$ en utilisant les nombres complexes .

2) **a)** Rappeler les formules donnant $\cos(2kt)$ en fonction de $\cos(kt)$ et $\sin(kt)$.

b) En déduire une écriture simplifiée de $f(t) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kt)$ et $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kt)$.

3) Linéariser $\cos^3(kt)$ puis exprimer $h(t) = \sum_{k=0}^{n} \cos^3(kt)$ à l'aide des fonctions précédentes .

Exercice N°2: *(6 points)* Soit $f : x \mapsto \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}\right) - \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f* : D_f .

2) Montrer que *f* est périodique .

3) **a)** Montrer que $\forall x \in [-1;1], \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

b) $\forall x \in D_f$, calculer $f(\dfrac{\pi}{2} - x)$.

4) Etudier *f* sur $I = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$.

a) Etudier soigneusement la dérivabilité de *f* sur I .

b) Calculer et simplifier f' .

c) Simplifier f on distinguera trois intervalles dans I .

5) Représentez graphiquement *f* sur $[-2\pi, 2\pi]$. (Echelle : 1 cm = $\dfrac{\pi}{4}$ en x et en y)

Exercice N°3: *(5 points)* Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^n = 1$.

2) Soit E l'équation $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n = \left(\dfrac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}\right)$ avec $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

a) Simplifier $\left(\dfrac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}\right)$.

b) Résoudre l'équation E .

3) Soit z_k une solution de E , calculer $S = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\dfrac{z_k+i}{z_k-i}\right)^p$.

Exercice N°4: *(4 points)* Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2}\right))$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer les limites de *f* aux bornes de son domaine de définition .

3) Calculer $f'(x)$.

4) Comparer *f* avec la fonction g définie par $g(x) = \operatorname{argth}\left(e^{-x}\right)$.