Devoir Surveillé N°5

14 Janvier 2006
Durée 4h

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

Exercice N°1: *(3 points)*

1) Calculer la somme $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.

2) On suppose n et p entiers tels que $1 \le p \le n$. Montrer que $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ et en déduire $\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$

3) En écrivant $p^2 = p(p-1) + p$, calculer $\sum_{p=1}^{n} p^2\binom{n}{p}$

Exercice N°2: *(4 points)*

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(1+x)$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et , pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) a) Montrer que f est de classe C^2 sur $[0;+\infty[$ et calculer , pour tout x de $[0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
b) Etudier les variations de f' , puis celle de f .
2) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;+\infty[$.
3) On suppose dans cette question que : $u_0 \in]e-1;+\infty[$
a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $e-1 < u_n \le u_{n+1}$.
b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4) On suppose dans cette question que : $u_0 \in]0;e-1[$
Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice N°3: (*6 points)*

On appelle f_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_a(x) = \dfrac{(a+2)x}{x+2-a}$, où a est un paramètre réel appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$.

Première partie

1) Déterminer l'ensemble de définition de f_a .
2) Montrer que toutes les courbes représentatives de f_a passent par deux points indépendants de a .
3) Etudier les variations de f_a .

Deuxième partie

Dans cette partie , on suppose que a appartient à l'intervalle $I = [0\,;\frac{2}{3}[$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par u_0 et la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = f_a(u_n)$.
On suppose que $u_0 \in [0;2a]$.
1) **a)** Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n \in [0;2a]$.
b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie .
c) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = 0$ ou si $u_0 = 2a$?

T.S.V.P

2) On suppose que u_0 est différent de 0 et $2a$ (par suite a est différent de 0)

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ et $u_n \neq 2a$.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 2a}$.

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de a .

c) Etudier l'existence et la valeur de la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) En déduire l'existence et la valeur de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice N°4: *(7 points)*

On désigne par n un nombre entier naturel >2 et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation $e^x = x^n$, que l'on note (E_n) .
A cet effet , on introduit la fonction f_n définie par : $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$.

1) **a)** Etudier la fonction f_n sur $[0;+\infty[$.

b) En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$

2) **a)** Déterminer , pour $n \geq 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$.

b) Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (u_n) , puis prouver la convergence de celle-ci .

3) **a)** Montrer que $u_n = \exp\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$.

b) En déduire la limite L de la suite (u_n) .

c) Déterminer un équivalent simple de $u_n - \mathrm{L}$ quand n tend vers $+\infty$.

4) **a)** Déterminer , pour $n \geq 4$, le signe de $f_n(v_{n-1})$.

b) Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (u_n) , puis étudier la limite de celle-ci .

5) **a)** On pose pour tout réel $x > 1$: $g(x) = x - \ln(x)$. Montrer que g réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur $]1;+\infty[$.

b) Montrer que $g\left(\dfrac{v_n}{n}\right) = \ln(n)$ avec $n > 2$.

c) Montrer à l'aide de g^{-1} (bijection réciproque de g) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n} = +\infty$.

d) Déterminer enfin un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$. (On pourra chercher un équivalent de $g^{-1}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$) .

Exercice N°5: *(2 points)*

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. Soit f l'application définie sur E par $f((x,y,z)) = (x+y, x+y, x+y)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E .

2) Montrer que Ker f est un sous-espace vectoriel de E .

3) Déterminer Ker f.

4) Déterminer Im f.