Devoir Surveillé N°3

14 Novembre 2005
Durée 3h

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

Exercice N°1: *(5 points)*

On note Γ la courbe d'équation polaire : $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}$.

1) Déterminer le domaine de représentation propre de la courbe .

2) Montrer que Γ est symétrique par rapport à (Oy) .

3) **a)** Montrer que $\lim\limits_{\theta \to 0}\left(\dfrac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}\right) = \infty$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\theta \to 0}\left(\dfrac{(\sin(\theta))^2}{1-\cos(\theta)}\right)$. En déduire l'asymptote .

4) Etudier les variations de ρ et son signe .

5) Tracer l'allure de la courbe .

Exercice N°2: *(5 points)*

On considère dans un repère orthonormé de l'espace E les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $\begin{cases} x-y=0 \\ 4y-az+a-4=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2y-z+1=0 \\ bx-2y-b=0 \end{cases}$

1. A quelle condition nécessaire et suffisante ces droites sont-elles parallèles ?

2. Même question pour que D_1 et D_2 soient sécantes et trouver alors leur point d'intersection.

3. Dans le cas où elles ne sont pas coplanaires .

a) Déterminer la perpendiculaire commune à ces deux droites .

b) En deduire la distance de D_1 à D_2 .

T.S.V.P

Exercice N°3: *(10 points)* (d'après Mines d'Alès 2004)

Partie I :

1) Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\mathrm{th}(t) = 0$, où z est une fonction de la variable réelle t à valeurs réelles .

Trouver la solution z_1 de cette équation telle que $z_1(0) = 1$.

2) Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\mathrm{th}(t) = t.\mathrm{th}(t)$.

Trouver la solution z_2 de cette équation telle que $z_2(0) = 0$.

Partie II :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal , on considère la courbe Γ de représentation paramétrique définie par : $\begin{cases} x(t) = t - \mathrm{th}(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} \end{cases}$.

3) Démontrer que Γ admet un axe de symétrie .

4) Etudier les branches infinies de Γ .

5) Etudier les variations de x et de y ; faire un tableau .

6) Préciser la nature du point A d'abscisse 0 , ainsi que la tangente en ce point .

7) **a)** Calculer ch(t) et th(t) lorsque sh(t) = 1 . Calculer la valeur de t correspondante . (on exprimera le résultat sous forme d'un logarithme népérien).

b) Déterminer le point B de Γ où la tangente à pour coefficient directeur -1; déterminer une équation cartésienne de la tangente en B à Γ .

8) Donner l'allure de la courbe Γ .

9) **a)** Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point M de paramètre t .

b) Cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point N. Calculer la distance MN .