Devoir Surveillé N°1

24 Septembre 2005
Durée 3h

(*l'usage de la calculatrice est interdit dans ce DS*)

Exercice N°1: *(5 points)*

Soit l'équation **(1)** $az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $z \in \mathbb{C}$.

1) Montrer que si $a \neq 0$ alors **(1)** peut se mettre sous la forme $au^2 + bu + c - 2a = 0$ avec $u = z + \frac{1}{z}$.

2) **a)** Résoudre l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

b) En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, en remarquant que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est une racine cinquième de 1.

Exercice N°2: *(4 points)*

Soit $f : x \mapsto \text{argth}\left(\frac{1+3\text{th}(x)}{3+\text{th}(x)}\right)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Calculer la dérivée de f sur cet ensemble.
3) Que peut-on en conclure sur f ?

Exercice N°3: *(5 points)*

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^n = 1$.

2) Soit E l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \left(\frac{\tan(\alpha)+i}{\tan(\alpha)-i}\right)$ avec $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

a) Simplifier $\left(\frac{\tan(\alpha)+i}{\tan(\alpha)-i}\right)$.

b) Résoudre l'équation E.

3) Soit z_k une solution de E, calculer $S = \sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{1+iz_k}{1-iz_k}\right)^p$.

Exercice N°4: *(6 points)*

1) **a)** Etudier la fonction $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

b) Soit $a \in \mathbb{R}^*$: Etudier la fonction $g : x \mapsto \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) - \arctan(x)$

2) **a)** En déduire que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ab > 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$ alors
$\text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$.

b) si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ab>1$ avec $a<0$ et $b<0$ alors $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$.

c) si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ab < 1$ alors $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

3) Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}(x+1) + \text{Arctan}(x-1) - \text{Arctan}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right)$

4) Calculer $A = \text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{5} + \text{Arctan}\frac{1}{8}$

5) Quel est l'ensemble des réels x tels que $\tan(2\text{Arctan}x) = 2\tan(\text{Arctan}x + \text{Arctan}(x^3))$?